ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

Σύγχρονες απαντήσεις σε παλιά ερωτήματα

Βιβλιογραφία Joseph Rotman

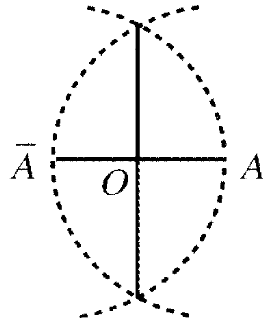
Γεωμετρικές Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη

Εδώ θα αποδείξουμε ότι τα κλασικά Ελληνικά προβλήματα [26] τού τετραγωνισμού τού κύκλου, τού διπλασιασμού τού κύβου και της τριχοτόμησης τής γωνίας δεν επιδέχονται λύση. Όπως θα δούμε, για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τη στοιχειώδη Θεωρία Σωμάτων και καθόλου τη Θεωρία Galois.

Είναι προφανές ότι μια γωνία 60° τριχοτομείται με τη βοήθεια ενός μοιρογνωμονίου (ή με οποιοδήποτε άλλο εργαλείο που μετρά τα μεγέθη γωνιών), αφού κάθε αριθμός διαιρείται διά του 3. Επομένως είναι σημαντικό να τεθούν τα προβλήματα προσεκτικά, ώστε να υπόκεινται σε ορισμένους βασικούς κανόνες. Τα Ελληνικά προβλήματα επιτρέπουν μόνο δύο εργαλεία που μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά έναν και μοναδικό τρόπο. Έστω ότι P και Q είναι δύο σημεία τού επιπέδου. Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα P και Q θα το συμβολίζουμε με PQ και το αντίστοιχο μήκος του με $|PQ|$. Ένας ***κανόνας*** (ή ***χάρακας***) είναι ένα εργαλείο που μπορεί να σχεδιάζει την ευθεία $L(P, Q)$ η οποία ορίζεται από τα σημεία P και Q· ένας ***διαβήτης*** είναι ένα εργαλείο που μπορεί να σχεδιάζει την περιφέρεια με ακτίνα $|PQ|$ και κέντρο είτε το P είτε το Q. Οι περιφέρειες αυτές θα συμβολίζονται αντίστοιχα με $C(P; Q)$ και $C(Q; P)$. Επειδή κάθε κατασκευή με κανόνα και διαβήτη αποτελείται πάντοτε μόνο από πεπερασμένο πλήθος βημάτων, μπορούμε να ορίσουμε επαγωγικά τα λεγόμενα «κατασκευάσιμα» σημεία.

Εγκαθιστούμε στο επίπεδο ένα σύστημα συντεταγμένων κατά τον εξής τρόπο: Επιλέγουμε πρώτα δύο σαφώς διακεκριμένα σημεία A και $\bar{A}$ και ονομάζουμε **άξονα των** x την ευθεία που ορίζεται από αυτά. Χρησιμοποιώντας τον διαβήτη σχεδιάζουμε τις περιφέρειες $C(A; \bar{A})$ και $C(\bar{A}; A)$ με ακτίνα $|A\bar{A}|$ και κέντρα τα A και $\bar{A}$ αντίστοιχα. Οι περιφέρειες αυτές τέμνονται σε δύο σημεία και ονομάζουμε **άξονα των** y την ευθεία που ορίζεται από αυτά. Αυτή είναι μεσοκάθετος στο $A\bar{A}$ και τέμνει τον άξονα των x σε ένα σημείο O που το ονομάζουμε **απαρχή** (των συντεταγμένων). Το μήκος $|OA|$ το ορίζουμε ίσο με 1. Με τον τρόπο αυτό εισάγουμε συντεταγμένες στο επίπεδο· ιδιαιτέρως $A = (1, 0)$ και $\bar{A} = (-1, 0)$.

[26][Σ.τ.Μ.] Για τους αναγνώστες που ενδιαφέρονται για την ιστορική διαδρομή των προβλημάτων με κανόνα και διαβήτη, παραπέμπουμε στο βιβλίο τού Μ.Α. Μπρίκα: *Τα περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας*, Αθήνα 1970.



Σχήμα 5

Ας προσπαθήσουμε να περιγράψουμε εντελώς πληροφοριακά το πώς κατασκευάζεται ένα νέο σημείο T από (τα όχι απαραίτητα διαφορετικά) παλαιά σημεία P, Q, R και S. Χρησιμοποιούμε πρώτα ένα ζεύγος, έστω το P, Q, για να σχεδιάσουμε μια ευθεία γραμμή ή μια περιφέρεια, και κατόπιν ένα δεύτερο ζεύγος, έστω το R, S, για να σχεδιάσουμε και πάλι μια ευθεία γραμμή ή μια περιφέρεια. Κατόπιν, το σημείο T προκύπτει ως σημείο τομής των δύο ευθειών, ή τής ευθείας και τής περιφέρειας, ή των δύο περιφερειών. Γενικώς ένα σημείο θα το ονομάζουμε *κατασκευάσιμο*, αν προκύπτει από τα A και $\bar{A}$ κατόπιν ενός πεπερασμένου αριθμού τέτοιου είδους βημάτων. Αν διαθέτουμε ένα ζεύγος κατασκευάσιμων σημείων, *δεν* διατεινόμαστε ότι τότε είναι κατασκευάσιμο και κάθε σημείο τής ευθείας ή τής περιφέρειας που ορίζεται από αυτές τις γραμμές.

Θα εκθέσουμε τώρα το θέμα μας με αυστηρότητα .

Ορισμός. Έστω E, F, G και H σημεία τού επιπέδου (όχι απαραίτητα σαφώς διακεκριμενα). Ένα σημείο Z είναι ***κατασκευάσιμο από τα*** E, F, G και H αν προκύπτει με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

(i) $Z \in L(E, F) \cap L(G, H)$, όπου $L(E, F) \neq L(G, H)$.

(ii) $Z \in L(E, F) \cap C(G; H)$.

(iii) $Z \in C(E; F) \cap C(G; H)$, όπου $C(E; F) \neq C(G; H)$.

Ένα σημείο Z είναι ***κατασκευάσιμο***, αν ή $Z = A$ ή $Z = \bar{A}$ ή αν υπάρχουν σημεία $P_1, \ldots, P_n$ με $Z = P_n$, τέτοια ώστε, για κάθε $j \geq 1$, το P_{j+1} να είναι κατασκευάσιμο από τα σημεία τού συνόλου $\{A, \bar{A}, P_1, \ldots, P_j\}$.

Παράδειγμα 38. Θα αποδείξουμε ότι το $Z = (0, 1)$ είναι ένα κατασκευάσιμο σημείο. Προηγουμένως είδαμε ότι η απαρχή $P_1 = O$ είναι κατασκευάσιμη. Τα $P_2 = (0, \sqrt{3})$ και $P_3 = (0, -\sqrt{3})$ είναι επίσης κατασκευάσιμα αφού ανήκουν και τα δύο στην $C(A; \bar{A}) \cap C(\bar{A}; A)$, και γι' αυτό αυτό μπορεί να σχεδιασθεί η ευθεία $L(P_2, P_3)$, που είναι ο άξονας των y . Τέλος

$$Z = (0, 1) \in L(P_2, P_3) \cap C(O; A).$$

Σημειώστε ότι παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε ορισμένα γνωστά αποτελέσματα τής Ευκλείδειας Γεωμετρίας, χωρίς όμως να τα αναφέρουμε διεξοδικά κάθε φορά. Για παράδειγμα, κάθε γωνία διχοτομείται με κανόνα και διαβήτη, δηλαδή αν είναι το $(\cos\theta, \sin\theta)$ κατασκευάσιμο σημείο, τότε το $(\cos\theta/2, \sin\theta/2)$ είναι επίσης κατασκευάσιμο.

Ορισμός. Ένας μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ ονομάζεται ***κατασκευάσιμος*** αν το σημείο (x, y) είναι κατασκευάσιμο.

Από το Παράδειγμα 38, διαπιστώνουμε ότι όλοι οι αριθμοί $1, -1, 0, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}$ και i είναι κατασκευάσιμοι.

Λήμμα R.1. *Ένας μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ είναι κατασκευάσιμος αν και μόνον αν το πραγματικό μέρος του x και το φανταστικό μέρος του y είναι κατασκευάσιμοι αριθμοί.*

Απόδειξη. Αν z είναι ένας κατασκευάσιμος αριθμός, τότε με μια γνωστή κατασκευή τής Ευκλείδειας Γεωμετρίας σχεδιάζεται η κάθετη (ως προς τον άξονα των x) ευθεία L που διέρχεται από το (x, y) και είναι παράλληλη προς τον άξονα των y. Έτσι ο x είναι ένας κατασκευάσιμος αριθμός, αφού το $(x, 0)$ είναι κατασκευάσιμο σημείο ως τομή τής L και τού άξονα των x. Παρόμοια, το σημείο $(0, y)$ είναι η τομή τού άξονα των y και τής ευθείας που διέρχεται από το (x, y) και είναι παράλληλη προς τον άξονα των x. Συνεπώς το $P = (y, 0)$ είναι κατασκευάσιμο ως σημείο τομής τού άξονα των x και τής περιφέρειας $C(O; P)$ και γι' αυτό ο y είναι ένας κατασκευάσιμος αριθμός.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι οι x και y είναι κατασκευάσιμοι αριθμοί, δηλαδή ότι τα $Q = (x, 0)$ και $P = (y, 0)$ είναι κατασκευάσιμα σημεία. Το $(0, y)$ είναι κατασκευάσιμο ως τομή τού άξονα των y και τής περιφέρειας $C(O; P)$. Τώρα φέροντας την κάθετη (ως προς τον άξονα των x) ευθεία γραμμή που διέρχεται από το $(x, 0)$ και την οριζόντια (δηλαδή την παράλληλη ως προς τον άξονα των y) ευθεία γραμμή που διέρχεται από το $(0, y)$, παίρνουμε το (x, y) ως τομή αυτών των δύο ευθειών. Έτσι το (x, y) είναι κατασκευάσιμο και σύμφωνα με τον ορισμό ο $z = x + iy$ είναι ένας κατασκευάσιμος αριθμός. □

Ορισμός. Το υποσύνολο τού $\mathbb{C}$ που αποτελείται από όλους τους ***κατασκευάσιμους αριθμούς*** συμβολίζεται με K.

Λήμμα R.2.

(i) *Εάν $K \cap \mathbb{R}$ είναι υπόσωμα τού $\mathbb{R}$, τότε το K είναι υπόσωμα τού $\mathbb{C}$.*

(ii) *Εάν $K \cap \mathbb{R}$ είναι υπόσωμα τού $\mathbb{R}$ και εάν $\sqrt{a} \in K$, για κάθε θετικό $a \in K \cap \mathbb{R}$, τότε το K είναι κλειστό ως προς τον σχηματισμό των τετραγωνικών ριζών.*

Απόδειξη. (i) Αν $z = a + ib$ και $w = c + id$ είναι κατασκευάσιμοι αριθμοί, τότε σύμφωνα με το Λήμμα R.1, τα $a, b, c, d \in K \cap \mathbb{R}$. Επομένως $a + c,\ b + d \in K \cap \mathbb{R}$, διότι το $K \cap \mathbb{R}$ είναι υπόσωμα και έτσι έχουμε $(a + c) + i(b + d) \in K$, σύμφωνα με το Λήμμα R.1. Παρόμοια, παίρνουμε $zw = (ac - bd) + i(ad + bc) \in K$. Εάν $z \neq 0$, τότε $z^{-1} = (a/z\bar{z}) - i(b/z\bar{z})$. Τώρα τα $a, b \in K \cap \mathbb{R}$, σύμφωνα με το Λήμμα R.1, και έτσι $z\bar{z} = a^2 + b^2 \in K \cap \mathbb{R}$, διότι το $K \cap \mathbb{R}$ είναι ένα υπόσωμα τού $\mathbb{C}$. Επομένως $z^{-1} \in K$.

(ii) Αν $z = a + ib \in K$, τότε τα $a, b \in K \cap \mathbb{R}$, σύμφωνα με το Λήμμα R.1, όπως και στο τμήμα (i), έπεται $r^2 = a^2 + b^2 \in K \cap \mathbb{R}$. Εφόσον ο r^2 δεν είναι αρνητικός, η υπόθεση τού λήμματος δίνει ότι οι $r \in K \cap \mathbb{R}$ και $\sqrt{r} \in K \cap \mathbb{R}$. Τώρα επειδή ο $z = re^{i\theta} \in K$ και το K είναι υπόσωμα τού $\mathbb{C}$, έπεται $e^{i\theta} = r^{-1}z \in K$. Τέλος από το γεγονός ότι κάθε γωνία διχοτομείται, προκύπτει $e^{i\theta/2} \in K$ και έτσι τελικά έχουμε $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \in K$, όπως ακριβώς θέλαμε. □

Θεώρημα R.3. *Το σύνολο K όλων των κατασκευάσιμων αριθμών είναι ένα υπόσωμα τού $\mathbb{C}$, το οποίο είναι κλειστό ως προς τον σχηματισμό των τετραγωνικών ριζών και τη μιγαδική συζυγία.*

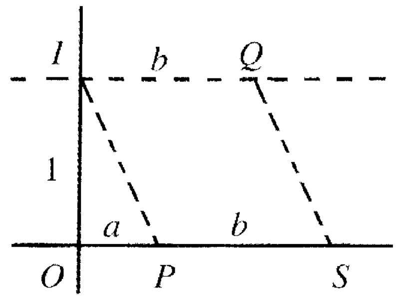
Απόδειξη. Σχετικά με τις δύο πρώτες αποφάνσεις είναι επαρκές να αποδείξουμε ότι για το $K \cap \mathbb{R}$ ικανοποιούνται οι σχετικές ιδιότητες που αναφέρονται στο Λήμμα R.2. Έστω ότι a και b είναι δύο κατασκευάσιμοι πραγματικοί αριθμοί.

(i) *Ο αριθμός $-a$ είναι κατασκευάσιμος.*

Αν $P = (a, 0)$ είναι ένα κατασκευάσιμο σημείο, τότε το $(-a, 0)$ αποτελεί την άλλη τομή τού άξονα των x και τής περιφέρειας $C(O; P)$.

(ii) *Ο αριθμός $a + b$ είναι κατασκευάσιμος.*

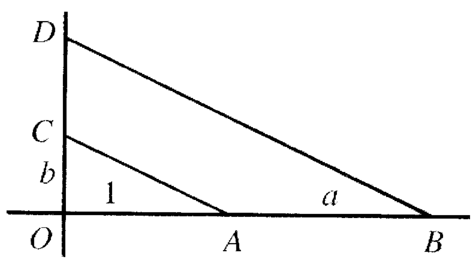
Θεωρούμε τα $I = (0, 1)$, $P = (a, 0)$ και $Q = (b, 1)$. Το Q είναι κατασκευάσιμο, επειδή αποτελεί την τομή τής οριζόντιας ευθείας που διέρχεται από το I και τής κάθετης ευθείας που διέρχεται από το $(b, 0)$ [το τελευταίο σημείο είναι κατασκευάσιμο, σύμφωνα με την υπόθεση]. Η ευθεία, η οποία διέρχεται από το Q και είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα IP, τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $S = (a + b, 0)$ που είναι ακριβώς το σημείο που θέλαμε. Μολονότι στο Σχήμα 6,



Σχήμα 6

τα a, b παρουσιάζονται ως θετικοί, είναι εύκολο να δει κανείς ότι η κατασκευή λειτουργεί όποιο και αν είναι το πρόσημο των a, b.

(iii) *Ο αριθμός* ab *είναι κατασκευάσιμος.*



Σχήμα 7

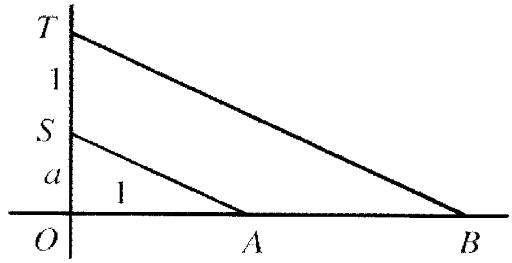
Σύμφωνα με το (i) μπορούμε να υποθέσουμε ότι και οι δύο αριθμοί a και b είναι θετικοί. Στο Σχήμα 7, θεωρούμε τα σημεία $A = (1, 0)$, $B = (1 + a, 0)$ και $C = (0, b)$. Ορίζουμε το D ως την τομή τού άξονα των y και τής ευθείας που διέρχεται από το B και είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα AC. Αφού τα τρίγωνα OAC και OBD είναι όμοια έχουμε:

$$|OB|/|OA| = |OD|/|OC|,$$

επομένως $(a + 1)/1 = (b + |CD|)/b$ και $|CD| = ab$. Συνεπώς ο αριθμός $b + ab$ είναι κατασκευάσιμος. Εφόσον ο αριθμός $-b$ είναι κατασκευάσιμος, σύμφωνα με το (i), παίρνουμε ότι και ο $ab = (b + ab) - b$ είναι κατασκευάσιμος, σύμφωνα με το (ii).

(iv) *Αν* $a \neq 0$, *τότε ο αριθμός* a^{-1} *είναι κατασκευάσιμος.*

Έστω ότι $A = (1, 0)$, $S = (0, a)$ και $T = (0, 1 + a)$. Ορίζουμε το B ως την τομή τού άξονα των x και της ευθείας που διέρχεται από το T και είναι παράλληλη προς



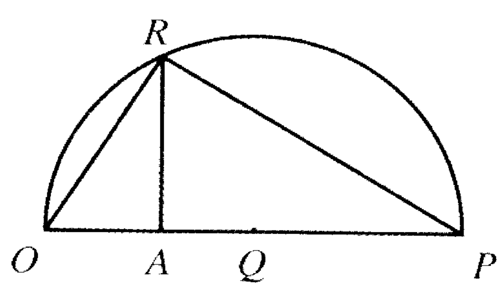
Σχήμα 8

το ευθύγραμμο τμήμα AS. Έτσι $B = (1 + u, 0)$, για κάποιο u. Από την ομοιότητα των τριγώνων OSA και OTB παίρνουμε

$$|OT|/|OS| = |OB|/|OA|.$$

Επομένως $(1 + a)/a = (1 + u)/1$ και γι' αυτό $u = a^{-1}$. Συνεπώς ο αριθμός $1 + a^{-1}$ είναι κατασκευάσιμος και γι' αυτό είναι ο $(1 + a^{-1}) - 1 = a^{-1}$ κι' αυτός κατασκευάσιμος.

(v) *Αν $a \geq 0$, τότε ο αριθμός $\sqrt{a}$ είναι κατασκευάσιμος.*



Σχήμα 9

Έστω ότι $A = (1, 0)$ και $P = (1 + a, 0)$. Κατασκευάζουμε πρώτα το μέσον Q τού ευθύγραμμου τμήματος OP. Κατόπιν ορίζουμε το σημείο R ως την τομή τής περιφέρειας $C(Q; O)$ με την κάθετη ευθεία που διέρχεται από το A. Τα (ορθογώνια) τρίγωνα AOR και ARP είναι όμοια. Επομένως

$$|OA|/|AR| = |AR|/|AP|,$$

και γι' αυτό $|AR| = \sqrt{a}$.

(vi) *Αν $z = a + ib \in K$, τότε ο αριθμός $\bar{z} = a - ib$ είναι κατασκευάσιμος.*

Σύμφωνα με το Λήμμα R.2, το K είναι υπόσωμα τού $\mathbb{C}$. Τώρα τα a, b ανήκουν στο K, σύμφωνα με το Λήμμα R.1. Η φανταστική μονάδα i ανήκει στο K, σύμφωνα με το Παράδειγμα 38. Γι' αυτό $-bi \in K$ και επομένως $a - ib \in K$. □

Πόρισμα R.4. *Αν οι αριθμοί a, b, c είναι κατασκευάσιμοι, τότε και οι θέσεις μηδενισμού τού δευτεροβάθμιου πολυωνύμου $ax^2 + bx + c$ είναι επίσης κατασκευάσιμοι αριθμοί.*

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα και τον τετραγωνικό τύπο. □

Θα θεωρήσουμε τώρα ορισμένα υποσώματα τού $\mathbb{C}$ που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη τού επαγωγικού βήματος τού Θεωρήματος R. 7.

Λήμμα R.5. *Έστω F ένα υπόσωμα τού $\mathbb{C}$ που περιέχει τη φανταστική μονάδα i και είναι κλειστό ως προς τη μιγαδική συζυγία. Θεωρούμε δύο στοιχεία $z = a + ib$ και $w = c + id \in F$ και έστω ότι $P = (a, b)$ και $Q = (c, d)$.*

(i) *Εάν $a + ib \in F$, τότε $a \in F$ και $b \in F$.*

(ii) *Εάν η εξίσωση τής $L(P, Q)$ είναι $y = mx + q$, όπου $m, q \in \mathbb{R}$, τότε $m, q \in F$.*

(iii) *Εάν η εξίσωση τής $C(P; Q)$ είναι $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, όπου $a, b, r \in \mathbb{R}$, τότε $r^2 \in F$.*

Απόδειξη. (i) Αν $z = a + ib \in F$, τότε $a = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \in F$ και $ib = \frac{1}{2}(z - \bar{z}) \in F$ και επειδή έχουμε υποθέσει ότι $i \in F$, έχουμε $b \in F$.

(ii) Αν η ευθεία $L(P, Q)$ δεν είναι κάθετη (στον άξονα των x), τότε η εξίσωσή της είναι $y - b = m(x - a)$. Ο αριθμός $m = (d - b)/(c - a) \in F$, διότι τα $a, b, c, d \in F$, και έτσι και το $q = -ma + b \in F$.

(iii) Η εξίσωση τής περιφέρειας $C(P; Q)$ είναι $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ και γι' αυτό $r^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2 \in F$. □

Λήμμα R.6. *Έστω F ένα υπόσωμα τού $\mathbb{C}$, το οποίο περιέχει τη φανταστική μονάδα i και είναι κλειστό ως προς τη μιγαδική συζυγία. Έστω ότι P, Q, R, S είναι κάποια σημεία, οι συντεταγμένες των οποίων ανήκουν στο σώμα F και ότι $\alpha = u + iv \in \mathbb{C}$.*

Εάν

$$\text{είτε} \quad \alpha \in L(P, Q) \cap L(R, S), \quad \text{όπου} \quad L(P, Q) \neq L(R, S),$$

$$\text{είτε} \quad \alpha \in L(P, Q) \cap C(R; S),$$

$$\text{είτε} \quad \alpha \in C(P; Q) \cap C(R; S), \quad \text{όπου} \quad C(P; Q) \neq C(R; S),$$

τότε $[F(\alpha) : F] \leq 2$.

Απόδειξη. Αν η ευθεία $L(P, Q)$ δεν είναι κάθετη, τότε το Λήμμα R.5(ii) μας πληροφορεί ότι η εξίσωσή της είναι $y = mx + b$, όπου $m, b \in F$. Αν η $L(P, Q)$ είναι κάθετη, τότε η εξίσωσή της είναι $x = b$, διότι το $P = (a, b) \in L(P, Q)$ και επομένως από το Λήμμα R.5(i) έπεται ότι $b \in F$. Παρόμοια, η εξίσωση της $L(R, S)$ είναι ή $y = nx + c$ ή $x = c$, όπου $m, b, n, c \in F$. Εφόσον οι δύο αυτές ευθείες δεν είναι παράλληλες, το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων ως προς τις συντεταγμένες (u, v) του $\alpha \in L(P, Q) \cap L(R, S)$ έχει λύση και μάλιστα αυτές οι συντεταγμένες ανήκουν και πάλι στο σώμα F. Έτσι στην περίπτωση αυτή έχουμε $[F(\alpha) : F] = 1$.

Έστω ότι η εξίσωση της $L(P, Q)$ είναι ή $y = mx+b$ ή $x = b$ και ότι η εξίσωση τής περιφέρειας $C(R; S)$ είναι $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$. Από το Λήμμα R.5 γνωρίζουμε ότι τα $m, q, r^2 \in F$. Επειδή το $\alpha = u + iv \in L(P, Q) \cap C(R; S)$ έχουμε

$$\begin{aligned} r^2 &= (u - c)^2 + (v - d)^2 \\ &= (u - c)^2 + (mu + q - d^2), \end{aligned}$$

και έτσι το u είναι θέση μηδενισμού ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου με συντελεστές στο $F \cap \mathbb{R}$. Επομένως $[F(u) : F] \leq 2$. Επειδή $v = mu + q$, έχουμε $v \in F(u)$ και επειδή $i \in F$, έχουμε $\alpha \in F(u)$. Επομένως $\alpha = u + iv \in F(u)$ και γι' αυτό $[F(\alpha) : F] \leq 2$.

Έστω ότι η περιφέρεια $C(P; Q)$ έχει εξίσωση $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ και η περιφέρεια $C(R; S)$ έχει εξίσωση $(x - c)^2 + (y - d)^2 = s^2$. Σύμφωνα με το Λήμμα R.5, έχουμε $r^2, s^2 \in F \cap \mathbb{R}$. Επειδή το $\alpha \in C(P; Q) \cap C(R; S)$, ισχύουν οι ισότητες

$$(u - a)^2 + (v - b)^2 = r^2 \text{ και } (u - c)^2 + (v - d)^2 = s^2.$$

Αν τις αναπτύξουμε, τότε διαπιστώνουμε ότι είναι και οι δύο τής μορφής $u^2 + v^2 +$ «κάτι ακόμη» $= 0$. Εξισώνοντας αυτά τα «κάτι ακόμη», προκύπτει μια εξίσωση τής μορφής $tu + t'v + t'' = 0$, όπου $t, t', t'' \in F$. Αν αυτήν τη συζεύξουμε με μία από τις εξισώσεις που αντιστοιχούν στις περιφέρειες, τότε επιστρέφουμε στην κατάσταση τής αμέσως προηγούμενης περίπτωσης. □

Θεώρημα R.7. *Ένας μιγαδικός αριθμός z είναι κατασκευάσιμος αν και μόνον αν υπάρχει κάποιος πύργος σωμάτων*

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n,$$

όπου $z \in K_n$ και $[K_{j+1} : K_j] \leq 2$, για όλα τα j.

Απόδειξη. Αν z είναι ένας κατασκευάσιμος αριθμός, τότε υπάρχει μια ακολουθία σημείων $1, -1, z_1, \ldots, z_n = z$, όπου κάθε z_j προέρχεται από το $\{1, -1, z_1, \ldots, z_{j-1}\}$. Επειδή η φανταστική μονάδα i είναι κατασκευάσιμος αριθμός, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $z_1 = i$. Θέτουμε

$$K_j = \mathbb{Q}(z_1, \ldots, z_j).$$

Αν $u = z_{j+1}$, τότε υπάρχουν κάποια σημεία $E, F, G, H \in K_j$, τέτοια ώστε να ισχύει ένα από τα παρακάτω:

$$u \in L(E, F) \cap L(G, H),$$
$$u \in L(E, F) \cap C(G; H),$$
$$u \in C(E; F) \cap C(G; H).$$

Χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς $j \geq 1$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K_j είναι κλειστό ως προς τη μιγαδική συζυγία. Η παραδοχή αυτή επιτρέπει την εφαρμογή τού Λήμματος R.6 και έτσι έχουμε ότι $[K_{j+1} : K_j] \leq 2$. Τέλος διαπιστώνουμε ότι και το K_{j+1} είναι επίσης κλειστό ως προς τη μιγαδική συζυγία, αφού αν z_{j+1} είναι μια θέση μηδενισμού τού δευτεροβάθμιου $f(x) \in K_j[x]$, τότε το $\bar{z}_{j+1}$ είναι η άλλη θέση μηδενισμού τού $f(x)$.

Για το αντίστροφο, αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $[B : F] = 2$ με $F \subset K$, τότε η B/F αποτελεί μια καθαρή επέκταση τύπου 2, ας πούμε $B = F(\beta)$, όπου $\beta \in L(P, Q) \cap C(R; S)$, για κάποια $P, Q, R, S \in F$. Από αυτό θα προκύψει κατόπιν ότι $B \subset K$. Αφού λοιπόν $[B : F] = 2$, υπάρχει κάποιο α, έτσι ώστε $B = F(\alpha)$, όπου το α είναι μια θέση μηδενισμού κάποιου ανάγωγου δευτεροβάθμιου πολυωνύμου $x^2 + bx + c \in F[x]$. Θέτοντας $\beta = \sqrt{b^2 - 4c}$, τότε επειδή $B = F(\beta)$ έπεται ότι η επέκταση B/F είναι καθαρή τύπου 2. Τέλος, για να διαπιστώσουμε ότι το β υλοποιείται ως σημείο τομής μιας ευθείας με μια περιφέρεια, επαναλαμβάνουμε την κατασκευή τού Θεωρήματος R.3(v). Έστω ότι L είναι η ευθεία που είναι κάθετη (στον άξονα των x) και διέρχεται από το $A = (1, 0)$ και ότι C είναι η περιφέρεια κέντρου $Q = (\frac{1}{2}(1 + \beta^2), 0)$ και ακτίνας $\frac{1}{2}(1 + \beta^2)$. □

Πόρισμα R.8. *Εάν ένας μιγαδικός αριθμός z είναι κατασκευάσιμος, τότε ο βαθμός $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}]$ είναι δύναμη τού 2.*

Απόδειξη. Αυτό προκύπτει αμέσως από το Θεώρημα R.7 και το Λήμμα 49. □

Παρατήρηση. Το αντίστροφο τού πορίσματος δεν είναι αληθές. Στο Παράδειγμα 36, είδαμε ότι το $p(x) = x^4 - 4x + 2$ είναι ένα ανάγωγο πολυώνυμο υπεράνω του $\mathbb{Q}$, το οποίο έχει ως ομάδα Galois την $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) = S_4$, όπου $E/\mathbb{Q}$ είναι ένα σώμα διάσπασης τού $p(x)$. Αν κάθε θέση μηδενισμού τού $p(x)$ ήταν κατασκευάσιμη, τότε θα ήταν και κάθε στοιχείο τού E κατασκευάσιμο, αφού σύμφωνα με το Θεώρημα R.3, όλοι οι κατασκευάσιμοι αριθμοί σχηματίζουν ένα υπόσωμα τού $\mathbb{C}$. Αν όμως H είναι μια 2–υποομάδα Sylow της $G \cong S_4$, τότε $[G : H] = 3$. Αυτό δίνει το συμπέρασμα ότι το ενδιάμεσο σώμα E^H είναι βαθμού $[E^H : \mathbb{Q}] = [G : H] = 3$ και έτσι, σύμφωνα με το Πόρισμα R.8, κανένα από τα στοιχεία του δεν μπορεί να είναι κατασκευάσιμο. Η αντίφαση αυτή δείχνει ότι κάποια από τις θέσεις μηδενισμού τού $p(x)$ δεν είναι κατασκευάσιμη, παρά το γεγονός ότι κάθε θέση μηδενισμού του είναι βαθμού 4 υπεράνω του σώματος $\mathbb{Q}$.

Τώρα πλέον είναι απλή υπόθεση η επίλυση ορισμένων ονομαστών προβλημάτων.

(1) *Ο «τετραγωνισμός τού κύκλου» είναι αδύνατος.*

Το πρόβλημα συνίσταται στην κατασκευή με κανόνα και διαβήτη ενός τετραγώνου με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν ενός κύκλου ακτίνας 1. Με άλλα λόγια εξετάζουμε το αν ο αριθμός $\sqrt{\pi}$ είναι κατασκευάσιμος. Όμως από ένα κλασικό αποτέλεσμα, το οποίο αποδείχθηκε από τον F. Lindemann το 1882, γνωρίζουμε ότι ο αριθμός π είναι υπερβατικός υπεράνω του $\mathbb{Q}$ (κοιτάξτε στο [Hadlock, σελ. 47]). Επομένως και ο αριθμός $\sqrt{\pi}$ είναι υπερβατικός και γι' αυτό δεν υπάρχει πεπερασμένη επέκταση τού $\mathbb{Q}$ που να τον περιέχει. Συνεπώς δεν μπορεί να τον περιέχει ούτε κάποια επέκταση τού $\mathbb{Q}$, ο βαθμός τής οποίας να είναι δύναμη τού 2.

(2) *Ο «διπλασιασμός τού κύβου» είναι αδύνατος.*

Το πρόβλημα συνίσταται στην κατασκευή με κανόνα και διαβήτη ενός κύβου με όγκο 2. Με άλλα λόγια, εξετάζουμε αν η πραγματική κυβική ρίζα τού 2, ας την πούμε α, είναι κατασκευάσιμη. Όμως το $x^3 - 2$ είναι ανάγωγο υπεράνω του $\mathbb{Q}$, σύμφωνα με το Κριτήριο Eisenstein, και γι' αυτό $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$ που δεν είναι δύναμη τού 2. Έτσι το αποτέλεσμα προκύπτει από το Πόρισμα R.8. Η πρώτη απόδειξή του έγινε από τον P.L. Wantzel το 1837.

(3) *Η τριχοτόμηση μιας οποιασδήποτε γωνίας είναι αδύνατη.*

Μια γωνία θ ορίζεται από δύο τεμνόμενες ευθείες γραμμές. Δεν αποτελεί περιορισμό τής γενικότητας το να δεχθούμε ότι οι δύο ευθείες τέμνονται στην απαρχή και ότι μια από αυτές είναι ο άξονας των x. Αν ήταν δυνατό να κατασκευάσουμε την τριχοτόμο τής γωνίας, τότε θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε και το σημείο $(\cos\theta/3, \sin\theta/3)$ που είναι η τομή τής τριχοτόμου και τής μοναδιαίας περιφέρειας. Όμως τότε θα ήταν κατασκευάσιμος και ο αριθμός $\cos\theta/3$, σύμφωνα με το Λήμμα R.1.

Με τη βοήθεια τής προηγούμενης παρατήρησης θα αποδείξουμε ότι η γωνία 60° δεν τριχοτομείται. Υπολογίζοντας το πραγματικό μέρος τού $e^{3i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$ παίρνουμε την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

Θέτοντας $u = 2\cos\theta$ και $\theta = 20^\circ$, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$u^3 - 3u - 1 = 0.$$

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι το αντίστοιχο τριτοβάθμιο πολυώνυμο είναι ανάγωγο υπεράνω του $\mathbb{Q}$ (αφού δεν διαθέτει καμία ρητή θέση μηδενισμού, σύμφωνα με την Άσκηση 63) και επομένως $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 3$. Τώρα από το Πόρισμα R.8 έπεται ότι ο αριθμός u δεν είναι κατασκευάσιμος. Το αποτέλεσμα αυτό αποδείχθηκε επίσης από τον P.L. Wantzel το 1837.

(4) *Κανονικά p–γωνα.*

Θεώρημα R.9 (Gauss). *Αν p είναι ένας περιττός πρώτος αριθμός, τότε ένα κανονικό p–γωνο είναι κατασκευάσιμο αν και μόνον αν $p = 2^{2^t} + 1$, για κάποιον φυσικό αριθμό $t \geq 0$.*

Απόδειξη. Εδώ έχουμε και πάλι το πρόβλημα τής κατασκευής ενός σημείου τής μοναδιαίας περιφέρειας και πιο συγκεκριμένα, του σημείου $z = e^{2\pi i/p}$. Το ανάγωγο πολυώνυμο τού z υπεράνω του $\mathbb{Q}$ είναι το κυκλοτομικό πολυώνυμο $\Phi_p(x)$ που έχει βαθμό $p - 1$ (Πόρισμα 41).

Ας υποθέσουμε ότι ο z είναι κατασκευάσιμος. Σύμφωνα με το Πόρισμα R.8, έχουμε $p - 1 = 2^s$, για κάποιο s. Ισχυριζόμαστε ότι το s είναι επίσης δύναμη τού 2. Αν δεν συνέβαινε αυτό, τότε θα υπήρχε ένας περιττός $k > 1$ με $s = km$. Αλλά το πολυώνυμο $x^k + 1$ παραγοντοποιείται υπεράνω του $\mathbb{Z}$ (επειδή ο -1 είναι μια θέση μηδενισμού). Θέτοντας $x = 2^m$, προκύπτει μια παραγοντοποίηση τού πρώτου p, πράγμα που δεν μπορεί να συμβαίνει.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός $p = 2^{2^t} + 1$ είναι πρώτος. Επειδή ο z είναι μια πρωταρχική p–οστή ρίζα τής μονάδας, το $\mathbb{Q}(z)$ είναι σώμα διάσπασης τού $\Phi_p(x)$ υπεράνω του $\mathbb{Q}$. Επομένως η τάξη τής $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q})$ είναι ίση με 2^{2^t} και γι' αυτό η ομάδα Galois είναι μια 2–ομάδα. Αλλά κάθε 2–ομάδα διαθέτει μια ορθόθετη σειρά, όλες οι παραγοντικές ομάδες τής οποίας έχουν τάξη 2 (αυτό προκύπτει εύκολα από το Θεώρημα G.23). Σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα τής Θεωρίας Galois, υπάρχει κάποιος πύργος σωμάτων $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_m = \mathbb{Q}(z)$ με

$[K_{i+1} : K_i] = 2$, για κάθε i, το οποίο, σύμφωνα με το Θεώρημα R.7, σημαίνει οτι ο z είναι κατασκευάσιμος. □

Παρατήρηση. Οι πρώτοι αριθμοί τής μορφής $2^{2^t} + 1$ ονομάζονται ***πρώτοι αριθμοί τού Fermat***. Όταν $0 \leq t \leq 4$, τότε παίρνουμε πρώτους αριθμούς (αυτοί είναι οι 3, 5, 17, 257, 65.537). Για όσες από τις επόμενες τιμές τού t υπολογίζεται ο $2^{2^t} + 1$, δεν παίρνουμε νέους πρώτους αριθμούς. Είναι άγνωστο αν υπάρχουν και άλλοι πρώτοι αριθμοί τού Fermat.

Ο Gauss κατασκεύασε γεωμετρικά το κανονικό 17–γωνο [27].

Πόρισμα R.10. *Είναι αδύνατη η κατασκευή τού κανονικού 7–γώνου, τού κανονικού 11–γώνου και τού κανονικού 13 –γώνου.*

Απόδειξη. Οι 7, 11 και 13 δεν είναι πρώτοι αριθμοί τού Fermat. □

Γνωρίζουμε το εξής: (κοιτάξτε στο [Hadlock, σελ. 106]):

Θεώρημα R.11. *Ένα κανονικό n–γωνο είναι κατασκευάσιμο αν και μόνον αν ο αριθμός n είναι γινόμενο τού 2 με κάποιους σαφώς διακεκριμένους πρώτους αριθμούς τού Fermat.*

Από αυτό έπεται ότι το κανονικό 9–γωνο και το κανονικό 14–γωνο δεν είναι κατασκευάσιμα, ενώ το κανονικό 15–γωνο είναι κατασκευάσιμο. Είναι πιθανόν το πλήθος από τα κατασκευάσιμα κανονικά n–γωνα, όπου n είναι ένας περιττός αριθμός, να είναι πεπερασμένο, αφού ενδέχεται να υπάρχουν μόνο πεπερασμένου πλήθους πρώτοι αριθμοί τού Fermat.